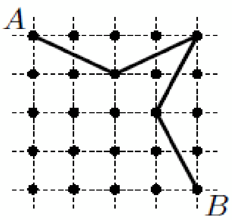
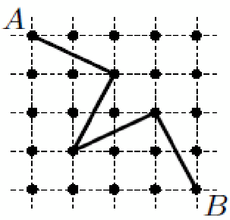
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2015-2016 учебный год

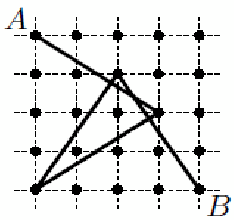
Решения

7 класс

1. *Ответ: у Васи 450 рублей, у Пети — 150 рублей.*
   Решение. Чтобы денег у мальчиков стало поровну, Вася должен отдать Пете 150 рублей. 150 рублей — треть денег Васи и у него 450 рублей, а у Пети — 150 рублей.
2. *Решение*. См. рис.



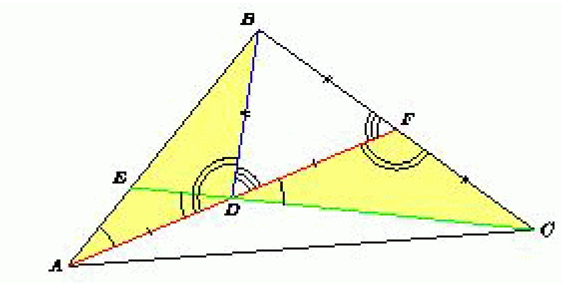




3. *Ответ: 5, 8, 7, 5, 8, 7, 5, 8.*
4. *Ответ: 5 девочек*.
   Решение. Первый слева ребёнок отдал 9 орехов, то есть у него стало на 9 орехов меньше, второй ребёнок отдал 8 орехов, а получил 1, то есть у него стало на 7 орехов меньше. Продолжая аналогичные рассуждения, заметим, что у первых пяти детей стало меньше на 9, 7, 5, 3 и 1 орехов соответственно, а у следующих пяти – больше на 1, 3, 5, 7 и 9 орехов соответственно. Так как $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, то девочками могли быть только последние пять детей.
5. *Решение*. Если в первой вертикали доминошки занимают нечетное число клеток, то хотя бы одна клетка первой верикали накрыта горизонтальной доминошкой. Аналогично хотя бы одна клетка третьей, пятой, седьмой и девятой вертикали накрыта горизонтальной доминошкой. Значит, у нас не менее 5 горизонтальных доминошек, и аналогично не менее 5 вертикальных. То есть всего не менее 10-ти доминошек.

8 класс

1. *Ответ: у Васи 580 рублей, у Пети — 280 рублей.*
   Решение. Чтобы у Васи стало на 30 рублей меньше, он должен отдать Пете 145 рублей. Значит, 145 рублей — это четверть денег Васи и у него 580 рублей, а у Пети 380 рублей.
2. *Ответ: через 15 минут.*
   Решение. За три с половиной часа будильник отстал на 3,5*4=14 минут, то есть в 12-00 он показывает 11-46. Так как он отстает в час на 4 минуты, это значит, что когда на обычных часах минутная стрелка сдвигается на 60 минут, то на нем — на 56 минут, а когда на обычных часах минутная стрелка сдвигается на 15 минут, то на нем — на 14 минут. А здесь как раз надо, чтобы на нем минутная стрелка сдвинулась на 14 минут, значит пройдет 15 минут.
3. Ответ: нельзя.
   Решение. Возьмем любые семь дробей. Их числители и знаменатели нечетны. Приведем все дроби к общему знаменателю. Числители останутся нечетными. Теперь при сложении дробей складываются только числители. Но при сложении трех нечетных чисел получится нечетное число, а при сложении четырех — четное. Значит, суммы не равны.
4. *Решение.* Треугольник *BDF* – равнобедренный, поэтому $\angle BDF = \angle BFD$. Значит, $\angle ADB = \angle DFC$.
   Поэтому треугольники *ADB* и *DFC* равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle EAD = \angle BAD = \angle FDC = \angle ADE$.
   Следовательно, треугольник *AED* – равнобедренный.



5. *Решение.* Раскрасим клетки полоски в черный и белый цвет так, чтобы соседние клетки были разного цвета, первую клетку покрасим в черный цвет. В начале игры на черных клетках лежит 26 камень, а на белых — 24. Первым своим ходом Федя передвигает камень вправо, такой ход единственен и после него на черных и на белых клетках будет стоять поровну камней. Дальше Федя должен делать ходы так, чтобы после его хода на черных и белых клетках камней оставалось поровну.
   Для этого он должен ходить так. Если Саша выкидывает камень, то Федя должен тоже выкинуть камень, но с клетки противоположного цвета, что он может, очевидно, сделать. Если Саша передвинул камень, то Федя тоже должен передвинуть камень, но с клетки противоположного цвета. Покажем, что он это тоже всегда может сделать. Допустим, Саша передвинул камень с черной клетки на белую. Тогда теперь на белых клетках на 2 камня больше, чем на черных. Посмотрим на белые камни. Пусть их *N*. Перед одним из них может быть конец доски и еще перед *N* – 2 из них могут быть черные камни, то есть перед одним из белых камней имеется пустая клетка.
   Таким образом мы показали, что Федя всегда может сделать ход, то есть он не проиграет.

9 класс

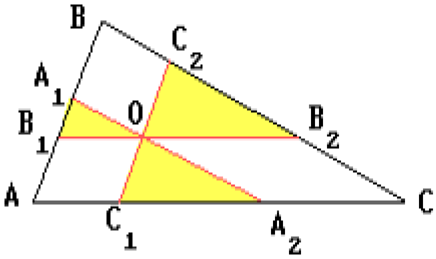
1. *Ответ: 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 0 = 36.*
2. *Решение*. Заметим, что значение выражения $n^{2015} + n + 1$ при любом целом n — нечетно, значит не делится на 1234.
3. *Решение*. $BK : BO = BO : AB$, а так как BO – биссектриса угла ABC, то $\angle OBK = \angle ABO$, поэтому треугольники BOK и BAO подобны. Значит, $\angle BOK = \angle BAO$. Аналогично, $\angle AOM = \angle ABO$, поэтому $\angle AOM + \angle AOB + \angle BOK = \angle ABO + (180° – \angle ABO – \angle BAO) + \angle BAO = 180°$. Следовательно, точки M, O и K лежат на одной прямой.
4. *Ответ: 2 и 2, 3 и 6.*
   Решение. Пусть стороны прямоугольника равны a и b, тогда
   $ab = 2a + 2b$
   $ab – 2a – 2b = 0$
   $ab – 2a – 2b + 4 = 4$
   $(a – 2)(b – 2) = 4$
   Рассмотрим произведение каких целых чисел может быть равно 4: 1 и 4, 2 и 2, –1 и –4, –2 и –2. Положительные значения для a и b получаются только из первых двух.
5. *Решение*. Нарисуем таблицу, строки которой соответствуют значениям роста, встречающимся в классе, а столбцы — значениям веса, встречающимся в классе. В ячейке на пересечении данных строки и столбца поставим число, равное количеству детей с соответствующими ростом и весом. Предположим, что утверждение задачи не выполняется. Тогда все числа в таблице — единицы (их ровно 32, каждая соответствует одному из учеников) и нули. Посчитаем суммы чисел во всех строках и во всех столбцах и выпишем их отдельно. Из условия следует, что среди выписанных чисел встречаются все натуральные числа от 1 до 11. Сумма чисел в таблице равна половине суммы всех выписанных чисел, то есть не меньше $(1 + 2 + \ldots + 11)/2=33 > 32$. Противоречие.

10 класс

1. *Ответ: 37 пеньков.*
   Решение. Первый велосипедист проезжает один километр за четыре минуты, а второй — за три. Всего они проехали 37 км, поэтому первый был в пути на 37 минут больше второго. Следовательно, первый велосипедист отдыхал на 37 минут меньше второго. Но из условия следует, что первый отдыхал в два раза меньше второго. Поэтому первый велосипедист отдыхал в точности 37 минут. Поскольку на каждом пеньке он сидел по целому числу минут, то пеньков было ровно 37.
2. *Решение*. Так как $f(x) = (x - m_1)(x - m_2)$, $g(x) = (x - k_1)(x - k_2)$,
   то $f(k_1) + f(k_2) = (k_1 - m_1)(k_1 - m_2) + (k_2 - m_1)(k_2 - m_2)$,
   $g(m_1) + g(m_2) = (m_1 - k_1)(m_1 - k_2) + (m_2 - k_1)(m_2 - k_2)$.
   Сгруппировав слагаемые и вынеся общие множители за скобки, получим:
   $A = (k_1 - m_1)(k_1 - m_2 - m_1 + k_2) + (k_2 - m_2)(k_1 - m_2 - m_1 + k_2) = (k_1 - m_2 - m_1 + k_2)^2 \geq 0$.
3. *Решение*. Обозначим $a = \angle BAM$, $b = \angle CDM$. Тогда, $\angle BMC = a + b$. Пусть k — середина AB, L — середина CD. Тогда $\angle KMA = \angle BAM$, $\angle DML = \angle CDM$, $2KM = AB$, $2ML = CD$. Подсчитаем величину того из углов $\angle KML$, который содержит внутри себя $\angle BMC$:
   $\angle KML = \angle KMB + \angle BMC + \angle CML = (90° - a) + (a + b) + (90° - b) = 180°$.
   Значит, точки K, M и L лежат на одной прямой. Тогда
   $BC + AD = 2KL = 2KM + 2ML = AB + CD$.
   Это и значит, что трапеция описанная.
4. *Ответ: второе выражение больше.*
   Решение. $m^2+\sqrt{m^2+m} < m^2+\sqrt{m^2+m+\frac{1}{4}} = m^2+m+\frac{1}{2} = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leq \left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} =$
   $= n^2-n+\frac{1}{2} = n^2-\sqrt{n^2-n+\frac{1}{4}} < n^2-\sqrt{n^2-n}$.
5. *Решение*. Предположим противное. Тогда пересечение любых четырех комиссий либо пустое, либо состоит хотя бы из двух депутатов. Поскольку всего комиссий 450 > 4*100, найдется депутат, который входит в состав хотя бы пяти комиссий. Назовем его Петя. Занумеруем комиссии, в которых он состоит. Поскольку пересечение первых четырех комиссий не пусто (там уже есть Петя), в них состоит еще хотя бы один депутат. Назовем его Васей. Вася не может входить еще и в пятую комиссию, иначе пересечение первых пяти комиссий состоит уже по крайней мере из двух депутатов. Аналогично должен быть отличный от Пети депутат, входящий в пересечение первой, второй, третьей и пятой комиссий (и не состоящий в четвертой комиссии).Назовем его Толей. Наконец, должен быть отличный от Пети депутат, входящий в пересечение первой, второй, четвертой и пятой комиссий (и не состоящий в третьей комиссии). Назовем его Сашей. Тогда в первой и второй комиссиях состоят четверо депутатов: Петя, Вася, Толя и Саша. Но это противоречит условию задачи.

11 класс

1. *Решение*. Если $x \le 0$, то $x^{12} - x^9 + x^4 - x \ge 0$. Если $0 < x < 1$, то $x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x) > 0$. Если $x \ge 1$, то $x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 > 0$.
2. *Ответ: не могло*.
   Решение. Упорядочим школьников по возрастанию баллов: $a < b < \ldots < q$. Допустим, среди этих чисел есть 15. Тогда $a \le 15$. От b до q в ряду 15 шагов, каждый не меньше 1, поэтому $q \ge b + 15 \ge b + a$. Противоречие.
3. *Решение*. Пусть O — произвольная точка, взятая внутри треугольника ABC;
   $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$, $C_1C_2 \parallel AB$ (см. рис).
   Обозначим
   $A_2C = OB_2 = x$, $A_2C_1 = y$, $AC_1 = OB_1 = z$.
   Тогда
   $$\frac{C_1C_2}{AB} = \frac{CC_1}{AC} = \frac{x+y}{AC}, \quad \frac{A_1A_2}{BC} = \frac{AA_2}{AC} = \frac{z+y}{AC}, \quad \frac{B_1B_2}{AC} = \frac{x+z}{AC}.$$
   Поэтому
   $$\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{AC} + \frac{C_1C_2}{AB} = \frac{z+y}{AC} + \frac{x+z}{AC} + \frac{x+y}{AC} = \frac{2(x+y+z)}{AC} = 2.$$



4. *Решение*. Предположим, что кузнечик побывал во всех секторах. Тогда сектор с номером 25 был последним, так как из него кузнечик не сможет переместиться в иной сектор. До этого кузнечик не мог побывать дважды в одном секторе, иначе бы его путь зациклился, и в 25-й сектор он бы не попал. А побывав во всех секторах по разу, кузнечик переместился бы на 1 + 2 + … + 24 = 300 секторов, то есть на число, кратное 25. Значит, начал свое путешествие в 25 секторе, что невозможно.

5. *Решение*. Положим для краткости $N = [m\sqrt{2}]$ и $M = [m\sqrt{7}]$. Заметим, что число $n\sqrt{2}$ не может быть целым, значит N < $n\sqrt{2}$. Тогда $N^2 < 2n^2$ и, поскольку оба числа в неравенстве целые, $2n^2 \geqslant N^2 + 1$. Аналогично $7m^2 \geqslant M^2 + 1$.
   Следовательно
   $14m^2n^2 \ge (M^2 + 1)(N^2 + 1) = M^2N^2 + M^2 + N^2 + 1 \ge M^2N^2 + 2MN + 1 = (MN + 1)^2$.
   Таким образом, $mn\sqrt{14} \geqslant MN + 1$ и, поскольку число в правой части неравенства целое, $[mn\sqrt{14}] \geqslant MN + 1 > [n\sqrt{2}] \cdot [m\sqrt{7}]$.

Особые критерии по некоторым задачам

7 класс

1. Только ответ без обоснования — 3 балла.
2. Любой правильный пример — 7 баллов.
3. Любой правильный пример — 7 баллов.
4. Только ответ без обоснования — 1 балл.
5. Сказано только, что одна из клеток левого столбца должна быть накрыта горизонтальной доминошкой (или аналогичное утверждение) — 1 балл.

8 класс

1. Только ответ без обоснования — 3 балла.
2. Только ответ без обоснования — 1 балл.
3. Только ответ нет — 0 баллов.
4. -
5. -

9 класс

1. Любой правильный пример — 7 баллов.
2. -
3. -
4. Если приведен только один вариант без доказательства, что других нет — 0 баллов.
   Если приведены оба один варианта без доказательства, что других нет — 1 баллов.
5. -

10 класс

1. Только ответ без обоснования — 1 балл.
2. -
3. -
4. -
5. -

11 класс

1. -
2. Если сказано, что самый маленький балл отличается от самого большого минимум на 16 и больше ничего нет — 3 балла.
3. -
4. -
5. -